Kansrekening 31-10-'03

Tentamenopgave[1]

I

1. Gegeven zijn vier vasen. Vaas 1 bevat 2 blauwe ballen en 4 rode, vaas 2 bevat 4 blauwe ballen en 2 rode, vaas 3 bevat 2 blauwe ballen en 1 rode, vaas 4 bevat 2 blauwe ballen en 4 rode. Eén van de vazen wordt op goed geluk gekozen en er wordt een bal uit getrokken. Wat is de kans dat de getrokken bal blauw is ?

2. Als de getrokken bal blauw is, wat is de kans achteraf dat de gekozen vaas Vaas 3 is ?

3. Beschrijf de kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ die aan vraag 1. ten grondslag ligt. Is P een Laplaceverdeling ?

II

1. Zij X een stochastische variabele (s.v.) die waarden in $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ aanneemt met kans $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, $\lambda > 0$. (Dit wordt voortaan afgekort met $X \in \pi(\lambda)$).

Bereken de genererende functie $g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}s^k$, $E(X)$ en $\sigma^2(X)$.

2. Laat X_1 en X_2 onafhankelijke s.v. zijn met $X_i \in \pi(\lambda_i)$. Bepaal de verdeling van $X = X_1 + X_2$.

3. Toon aan, onder dezelfde voorwaarden als in 2., dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ en bepaal p en q.

4. Laat omgekeerd X_1 en X_2 twee s.v. zijn zodanig dat $X := X_1 + X_2 \in \pi(\lambda)$ en zó dat $P(X_1 = k \mid X = n) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$.

   i. Bereken $P(X_1 = k, X_2 = \ell) = p_{k,\ell}$ en bepaal de verdelingen van X_1 en X_2.

   ii. Zijn X_1 en X_2 onafhankelijk ?

Aanwijzing: Druk $p_{k,\ell}$ uit in termen van $P(X_1 = k, X_2 = \ell \mid X = k + \ell)$.

III

Zij $(X_i)_{i\geq 1}$ een rij onafhankelijke stochastische variabelen met $P(X_i \leq t) = \int_0^t e^{-x}dx$ voor $t \geq 0$ en $P(X_i \leq t) = 0$ voor $t < 0$.

1. Bereken $E(X_i)$ en $\sigma^2(X_i)$.

2. Toon aan dat $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ verdeeld is met de dichtheid $Y(x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}e^{-x}$ (waar $Y = 1_{[0,+\infty)}$ de Heaviside functie is).

Aanwijzing: Doe een directe berekening of gebruik de bekende eigenschappen van de Gamma-verdelingen.

3. Toon aan dat voor alle $\lambda \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\lambda\sqrt{n}+n} \frac{x^{n-1}e^{-x}}{(n-1)!}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-x^2/2}dx$$

[1] De onderdelen I, II en III zijn onafhankelijk